b- $\left\{\begin{array}{c} u \text{ est dérivable sur } \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ \forall\theta\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]; u(\theta)\in[0;2] \\ \Psi_n \text{ est dérivable sur } [0;2] \end{array}\right.$

$\Rightarrow F_n = \Psi_n \circ u$ est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$\bullet\forall\theta\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]; F_n'(\theta) = u'(\theta)\times\Psi_n'[u(\theta)]$

$= \cos\theta \times f_n(1+\sin\theta)$

Si $n=0$; $F_n'(\theta) = \cos\theta\sqrt{(1+\sin\theta)(2-1-\sin\theta)}$

$= \cos\theta\sqrt{1-\sin^2\theta} = \cos\theta|\cos\theta|$

$= \cos^2\theta \quad \text{car } \theta\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Si $n>0$; $F_n'(\theta) = \cos\theta.(1+\sin\theta)^n\sqrt{(1+\sin\theta)(2-1-\sin\theta)}$

$= \cos^2\theta.(1+\sin\theta)^n$.

2/a- $\boxtimes\forall\theta\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right], F_0'(\theta) = \cos^2\theta$ et $F_0\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{1-1} f_0(t)dt = 0$.

$\Rightarrow F_0$ est la primitive sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction $(\theta\mapsto\cos^2\theta)$ qui s'annule en $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

$\Rightarrow \forall\theta\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]; F_0(\theta) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta}\cos^2 t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{1+\cos 2t}{2}dt$

$= \frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} = \frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}+\frac{\pi}{4}$.

$\boxplus\forall\theta\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right], F_1'(\theta) = \cos^2\theta.(1+\sin\theta)$ et $F_1\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$

$\overset{th}{\Rightarrow}\forall\theta\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right], F_n(\theta) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta}\cos^2 t.(1+\sin t)dt$

$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta}\cos^2 t\,dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta}\sin t\cos^2 t\,dt$

$= \frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}+\frac{\pi}{4}-\left[\frac{1}{3}\cos^3 t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta}$

$= \frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\cos^3\theta$.

b- $A=\int_0^1(f_0(x)-f_1(x))dx = \int_0^1 f_0(x)dx - \int_0^1 f_1(x)dx$

$= \int_0^{1+\sin 0} f_0(x)dx - \int_0^{1+\sin 0} f_1(x)dx$.

$= F_0(0) - F_1(0) = \frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

Ainsi $A=\frac{1}{3}$ u.a. (u.a.désigne unité d'aire)